Tri možnosti sú ako trojsten – nejde to

Pavel Brunovský

18th January 2016

Ospravedlnenia

- Nejde to:

n	1	2	3	4	5	
n-sten	x	x	x			
n alternatív			x	x	x	x

- Einstein: "Všetko by sa malo robiť tak jednoducho, ako je to možné, ale nie jednoduchšie"

Teória spoločenskej voľby

Pandrláci – 1,2,. . . , I, napríklad rozhodcovia v gymnastike
Alternatívy – $x, y, z, \ldots$ napríklad gymnasti
Rozhodcovia usporiadajú gymnastov do poradia podľa svojich *preferencií*:

$x \succ_i y$: pandrlák i *preferuje* (hodnotí vyššie gymnastu) x ako gymnastu y; ak ho preferuje *slabo* (t.j. $y \not\succ_i x$), píšeme $x \succeq_i y$.

$x \sim_i y$: pandrlák i je indiferentný voči x a y, ak $x \succeq y$ aj $y \succeq x$.

$\succeq$ je *relácia*, pripomínajúca $\geq$. Vlastnosti?

Vlastnosti relácie slabá preferencia

- *tranzitívnosť*: ak $x \succeq y$ a $y \succeq z$ tak aj $x \succeq z$
- *reflexívnosť*: $x \succeq x$
- *úplnosť*: pre ľubovoľné x, y buď $x \succeq y$ alebo $y \succeq x$.

Úloha

Relácia preferencie pandrláka (rozhodcu) definuje jeho*osobné usporiadanie* alternatív (gymnastov), I-ticu usporiadaní nazveme *profilom*

Základná úloha teórie spoločenskej voľby:
Vytvoriť všeobecné pravidlo, ktoré každému profilu usporiadaní priradí *spoločenské usporiadanie* (napríklad finálne výsledky gymnastických pretekov), odrážajúce čo najlepšie osobné usporiadania členov spoločenstva.

Vlastnosti pravidla I

Čo je *odrážať*?

Pandrláci (rozhodcovia): Janík, Petrík, Pavlík (I=3)
Alternatívy (pretekári): Li, Chow, Wang

Profil:
Janík(1): $Li \succ_1 Chow \succ_1 Wang$
Petrík(2): $Chow \succ_2 Wang \succ_2 Li$
Pavlík(3): $Li \sim_3 Chow \succ_3 Wang$

Odrážalo by pravidlo spoločenskej voľby osobné usporiadania, ak by vytvorilo usporiadanie $Li \succ Wang \succ Chow$?

Vlastnosti pravidla I

Pandrláci (rozhodcovia): Janík, Pavlík, Petrík
Alternatívy (pretekári): Li, Chow, Wang

Profil:
Janík(1): $Li \succ_1 Chow \succ_1 Wang$
Petrík(2): $Chow \succ_2 Wang \succ_2 Li$
Pavlík(3): $Li \sim_3 Chow \succ_3 Wang$

Odrážalo by pravidlo spoločenskej voľby osobné usporiadania, ak by vytvorilo usporiadanie $Li \succ Wang \succ Chow$?

Asi sotva, a preto žiadame
WP (*weak Pareto,*):
Ak $x \succ_i y$ pre všetky i, tak $x \not\prec y$, t.j. $x \succeq y$
(voľba nie je vnútená zvonka)

Vlastnosti pravidla II

Janík(1): $Li \succ_1 Chow \succ_1 Wang$
Petrík(2): $Chow \succ_2 Wang \succ_2 Li$
Pavlík(3): $Li \sim_3 Chow \succ_3 Wang$

Prečo nie $Chow \succ Wang \succ Li$? Aké by to bolo pravidlo?

Vlastnosti pravidla II

(**SYM**): symetria = anonymita = rovnocennosť = invariantnosť vzhľadom na permutácie:

$$\begin{array}{lcl}
Li \succ_1 Chow \succ_1 Wang & \quad & Chow \succ_1 Wang \succ_1 Li \\
Chow \succ_2 Wang \succ_2 Li & \quad & Li \succ_2 Chow \succ_2 Wang \\
Li \sim_3 Chow \succ_3 Wang & \quad & Li \sim_3 Chow \succ_3 Wang
\end{array}$$

dávájú tú istú spoločenskú voľbu

Pravidlo, čo spĺňa (**WP**),(**SYM**)

$$
\begin{aligned}
&Li \succ_1 Chow \succ_1 Wang\\
&Chow \succ_2 Wang \succ_2 Li\\
&Li \sim_3 Chow \succ_3 Wang
\end{aligned}
$$

Pravidlo, čo spĺňa (**WP**),(**SYM**)

$Li \succ_1 Chow \succ_1 Wang$
$Chow \succ_2 Wang \succ_2 Li$
$Li \sim_3 Chow \succ_3 Wang$

Bordovo skore(Borda count):
Li 1, Chow 2, Wang 3
Chow 1, Wang 2 Li 3
Li 1,5, Chow 1,5, Wang 3

V súčte Li 5,5, Chow 4,5, Wang 8, teda $Chow \succ Li \succ Wang$

Jean-Charles de Borda 1733 – 1799

Čo nás po gymnastike?

- takto sa naozaj voľakedy určovalo poradie v krasokorčuľovaní
- Voľby (kráľovnej krásy, krúžkovanie kandidátov...)
- Nemocnica alebo kasárne (Senica 1937)
- Voľby prezidenta - iba víťaz, konkurz na profesorské miesto - viacerí

Iné pravidlá? Ďalšie vlastnosti?

Dve alternatívy: Kasárne (K), Nemocnica (N)

Bordovo skóre = väčšinové hlasovanie:

Je v ačšinové hlasovanie *jediné* pravidlo, čo spĺňa (**WP**),(**SYM**)?

Čo tak **kvórum**?

Napríklad ústavný zákon moňo zmeniť iba ak za zmenu hlasujú 2/3 pandrlákov. Na profesúru treba aby za uchádzača hlasovalo 2/3 členov vedeckej rady; v bezpečnostnej rade platí "právo veta", teda jednomyseľnosť

Typické: *asymetria alternatív* - na zmenu (áno) treba silnejšiu podporu ako na zachovanie statu quo (nie)

Dve alternatívy všeobecne

Borda $\equiv$ rozdielové skore: $K \succ_i N: \; h_i = 1$, $K \sim_i N: \; h_i = 0$, $K \prec N: \; h_i = -1$.

$$\begin{aligned} K &\succ N \text{ ak } h_1 + \cdots + h_I > 0 \\ K &\sim N \text{ ak } h_1 + \cdots + h_I = 0 \\ K &\prec N \text{ ak } h_1 + \cdots + h_I < 0 \end{aligned}$$

väčšinové hlasovanie

Všeobecnejšie:

- asymetria pandrlákov: nerovnaké $|h_i|$,

$$\begin{aligned} h_i &= 1 \text{ ak } i = i_0 \\ h_i &= 0 \text{ ak } i \neq i_0 \end{aligned}$$

  - i_0 je *diktátor*,
- asymetria alternatív:
  $h_i = -2$ ak NIE, $h_i = 1$ ak ÁNO - dvojtertinové kvórum

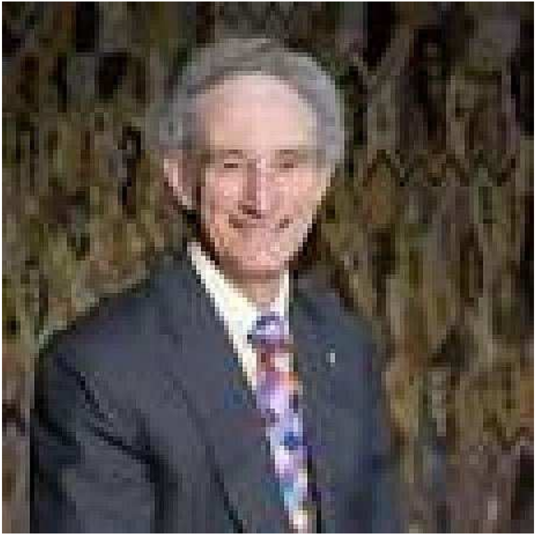
Jednoznačnosť väčšinového hlasovania

R. May 1952: Jediná spoločenská voľba, ktorá spĺňa (**SYM**), požiadavku *symetrie alternatív* (**SYM-A**) a požiadavku *positive responsibility* - (**PR**):

"Ak spoločenská voľba nejakého profilu vedie ku $K \succeq N$, jeden z pandrlákov i zmení svoju preferenciu z $K \prec_i N$ na $K \sim_i N$ alebo z $K \sim_i N$ na $K \succ_i N$ tak sa $K \succeq N$ zmení na $K \succ N$"

je väčšinové hlasovanie.

Robert May 1936



Dôkaz Mayovej vety

(**SYM**): Voľba závisí iba od dvojice (I^K, I^N), kde I^K, I^N sú počty pandrlákov i, ktorí $K \succ_i N$ resp. $N \succ_i K$.

(**SYM-A**): $I^K = I^N \implies K \sim N$. Lebo keby $K \succ N$, tak by aj $N \succ K$ a to nie je možné.

Ak $I^K > I^N = J$, tak oproti profilu $I^K = I^N = J$ muselo niekoľko i zmeniť preferenciu z $K \sim_i N$ na $K \succ_i N$, z čoho vzhľadom na (**PR**) vyplýva $K \succ N$.

Zo (**SYM-A**) vyplýva $N \succ K$ ak $I^- > I^+$.

3 a viac alternatív: podmienka nezávislosti dvojíc

Čo keby Wanga dodoatočne vylúčili pre doping?

Borda pred vylúčením	Borda po vylúčení
Li 1, Chow 2, Wang 3	Li 1, Chow 2
Chow 1, Wang 2 Li 3	Chow 1, Li 2
Li 1,5, Chow 1,5, Wang 3	Li 1,5, Chow 1,5
skore Chow 4,5, Li 5,5, Wang 8	Li 4,5, Chow 4,5

Podmienka nezávislosti dvojíc, (**PND**): Spoločenská preferencia medzi dvoma alternatívami nezávisí od preferencií pandrlákov k ostatným alternatívam

Ak nie je splnená, jednotlivý pandrlák môže spoločenskú voľbu manipulovať.

Arrowova veta

Arrow 1950: (**WP**), (**SYM**) a (**PND**) sú nezlučiteľné. Presnejšie, ak (**WP**), (**SYM**), tak existuje medzi pandrlákmi *diktátor*, t.j. pandrlák i_0 taký, že ak $x \succ_{i_0} y$ tak $x \succ y$.

Arrowova veta

- má mnoho názvov: possibility theorem, impossibility theorem, veta o diktátorovi
- je neintuitívna a taký je aj jej dôkaz. Ten je navyše komplikovaný, ale celkom elementárny

Čo ďalej:

- hierarchia diktátorov - zákony čriedy
- preferencia $\rightarrow$ postihnutie: "sila" preferencií, porovnanie medzi pandrlákmi
- "Hammond equity" - Rawlsovo pravidlo: rozhodovanie podľa pandrláka, čo je na tom najhoršie
- potreba presnejšieho oceňovania preferencií

Kenneth Arrow, 1921