Mnohouholníky

Miloš Božek

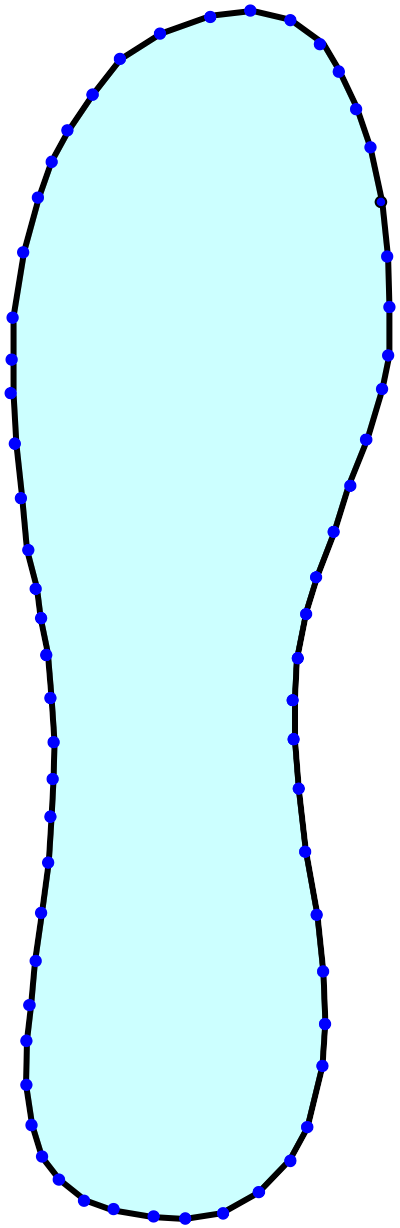
Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky,
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky,
Univerzita Komenského, Bratislava

Úvod

Prehľad

1. Lomené čiary
2. Čo je mnohouholník
3. Kedy leží bod v mnohouholníku
4. Triangulácia – rozklad mnohouholníka na trojuholníky
5. Obsah mnohouholníka

62-uholník
Stielka topánky



1. Lomené čiary

Dané sú body $A_1, A_2, \ldots, A_n$ v rovine alebo v priestore, $n \geq 2$. Dôležité je ich poradie.

Lomená čiara $A_1A_2 \ldots A_n$ = zjednotenie úsečiek $A_1A_2, \ldots, A_{n-1}A_n$

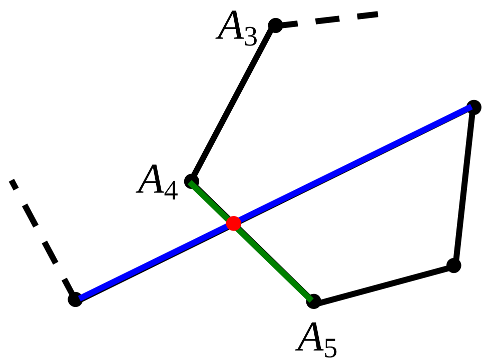
vrcholy lomenej čiary $A_1A_2 \ldots A_n$ = body $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n$

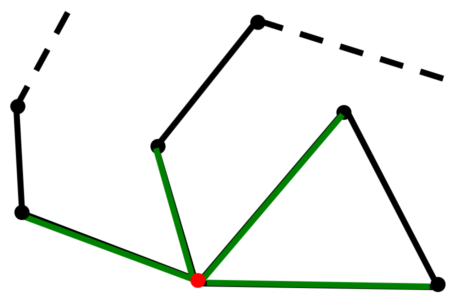
strany lomenej čiary $A_1A_2 \ldots A_n$ = úsečky $A_1A_2, \ldots, A_{n-1}A_n$

Jednoduchá lomená čiara (t.j. bez samopriesekov)

1. spoločný bod každých dvoch strán je vrchol lomenej čiary
2. každý vrchol patrí najviac dvom stranám

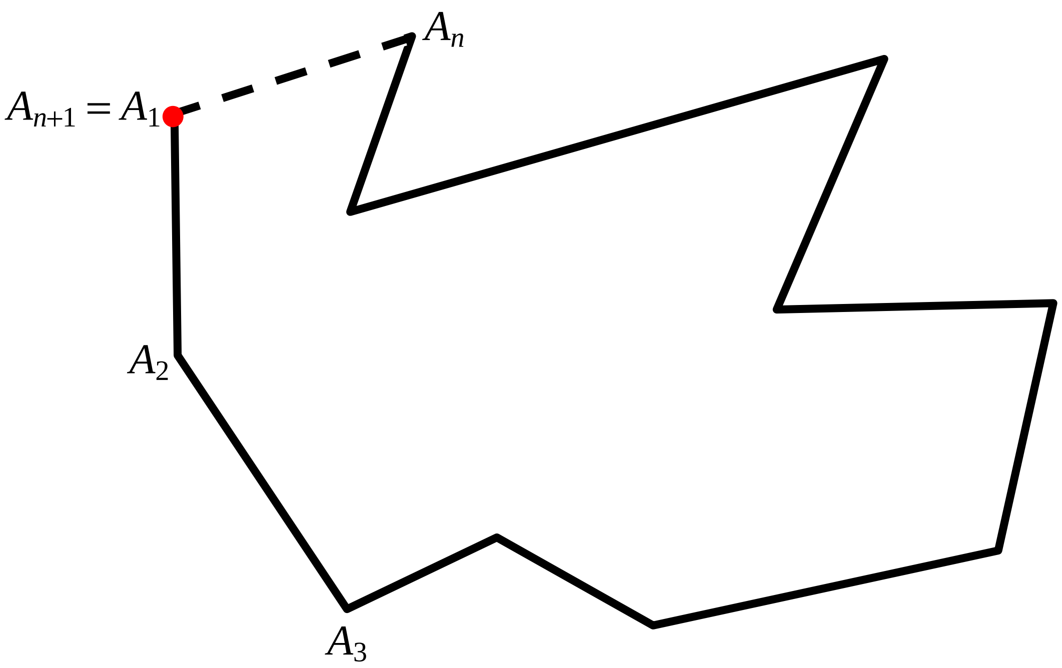
Zakázané:





Jednoduchá uzavretá lomená čiara $A_1A_2 \ldots A_n$ = jednoduchá lomená čiara $A_1A_2 \ldots A_nA_{n+1}$, kde $A_{n+1} = A_1$

- jej stranou je aj úsečka A_nA_1
- strana A_nA_1 je susedná so stranou A_1A_2
- vrchol A_1 je susedný s vrcholom A_n
- každý vrchol patrí práve dvom stranám

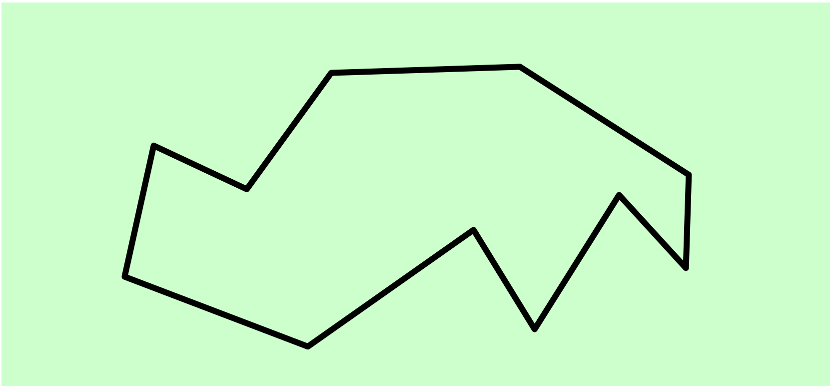


2. Mnohouholníky

Odteraz všetko v jednej rovine.

Jordanova veta

1. Ak z roviny vynecháme všetky body jednoduchej uzavretej lomenej čiary, zvyšok roviny sa rozpadne na dve časti.
2. Jedna z tých dvoch častí zvyšku roviny je ohraničená (t.j. pre všetky jej body X, Y platí $|XY| \leq k$ pre vhodné kladné číslo k)
   a druhá je neohraničená.



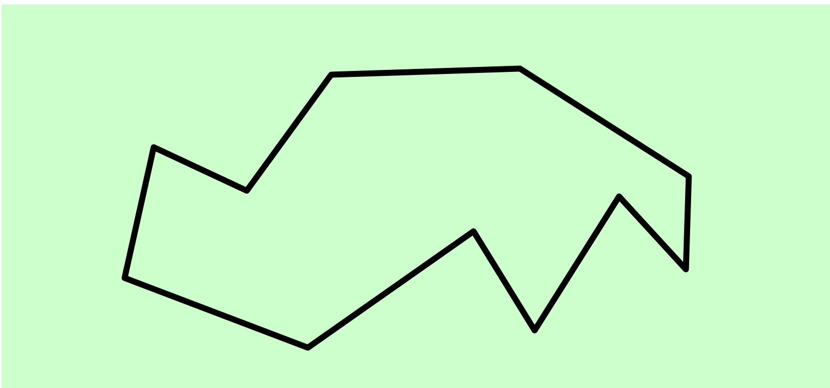
(Podobne sa chová napríklad kružnica a elipsa, všeobecne každá jednoduchá uzavretá krivka v rovine.)

2. Mnohouholníky

Odteraz všetko v jednej rovine.

Jordanova veta

3. Ak z roviny vynecháme všetky body jednoduchej uzavretej lomenej čiary, zvyšok roviny sa rozpadne na dve časti.
4. Jedna z tých dvoch častí zvyšku roviny je ohraničená (t.j. pre všetky jej body X, Y platí $|XY| \leq k$ pre vhodné kladné číslo k)
   a druhá je neohraničená.



Definícia
Mnohouholník určený jednoduchou uzavretou lomenou čiarou $A_1A_2 \ldots A_n$ je ohraničená časť roviny z predchádzajúcej vety spolu so všetkými bodmi lomenej čiary $A_1A_2 \ldots A_n$.

Zapisujeme ho rovnako ako lomenú čiaru: $M = A_1A_2 \ldots A_n$.

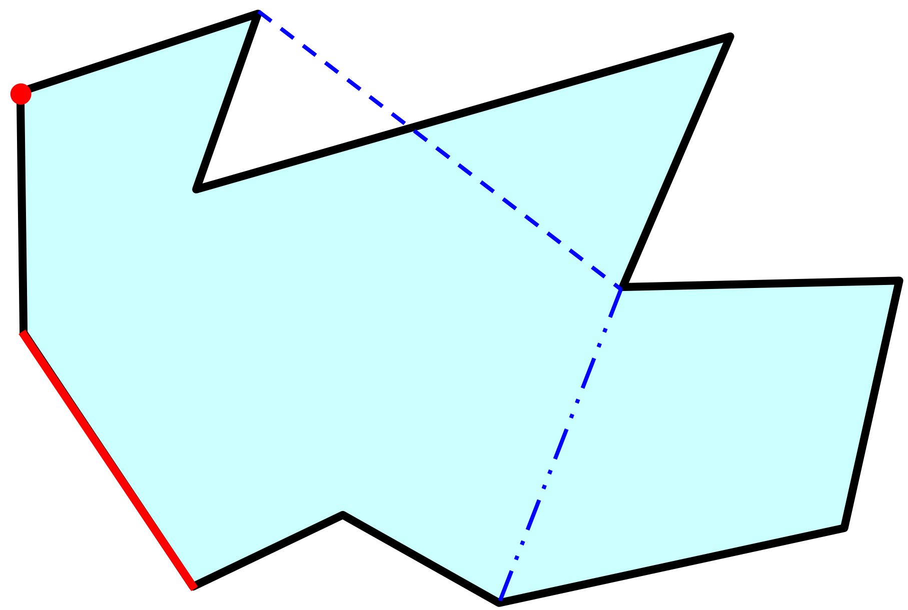
Vrcholy, strany a uhlopriečky mnohouholníka

Vrcholy mnohouholníka $A_1A_2 \dots A_n$ = vrcholy lomenej čiary $A_1A_2 \dots A_n$.

Strany mnohouholníka $A_1A_2 \dots A_n$ = strany jednoduchej uzavretej lomenej čiary $A_1A_2 \dots A_n$.

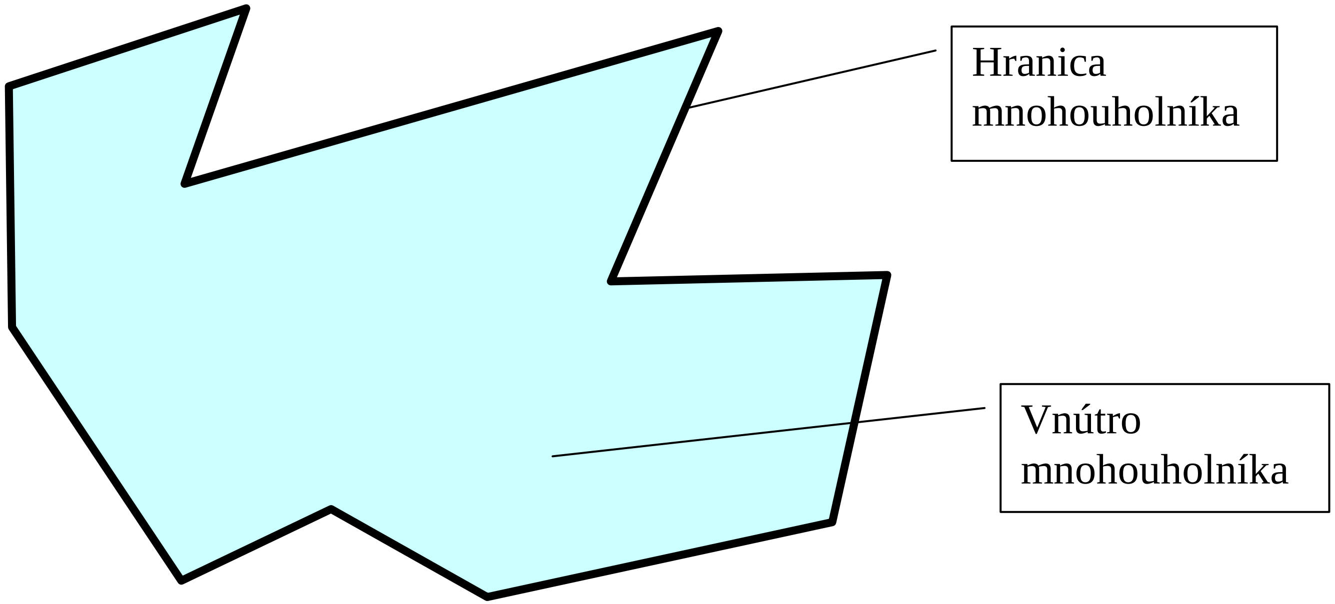
Uhlopriečky mnohouholníka = úsečky spájajúce nesusedné vrcholy.

n-uholník = mnohouholník s práve n vrcholmi.

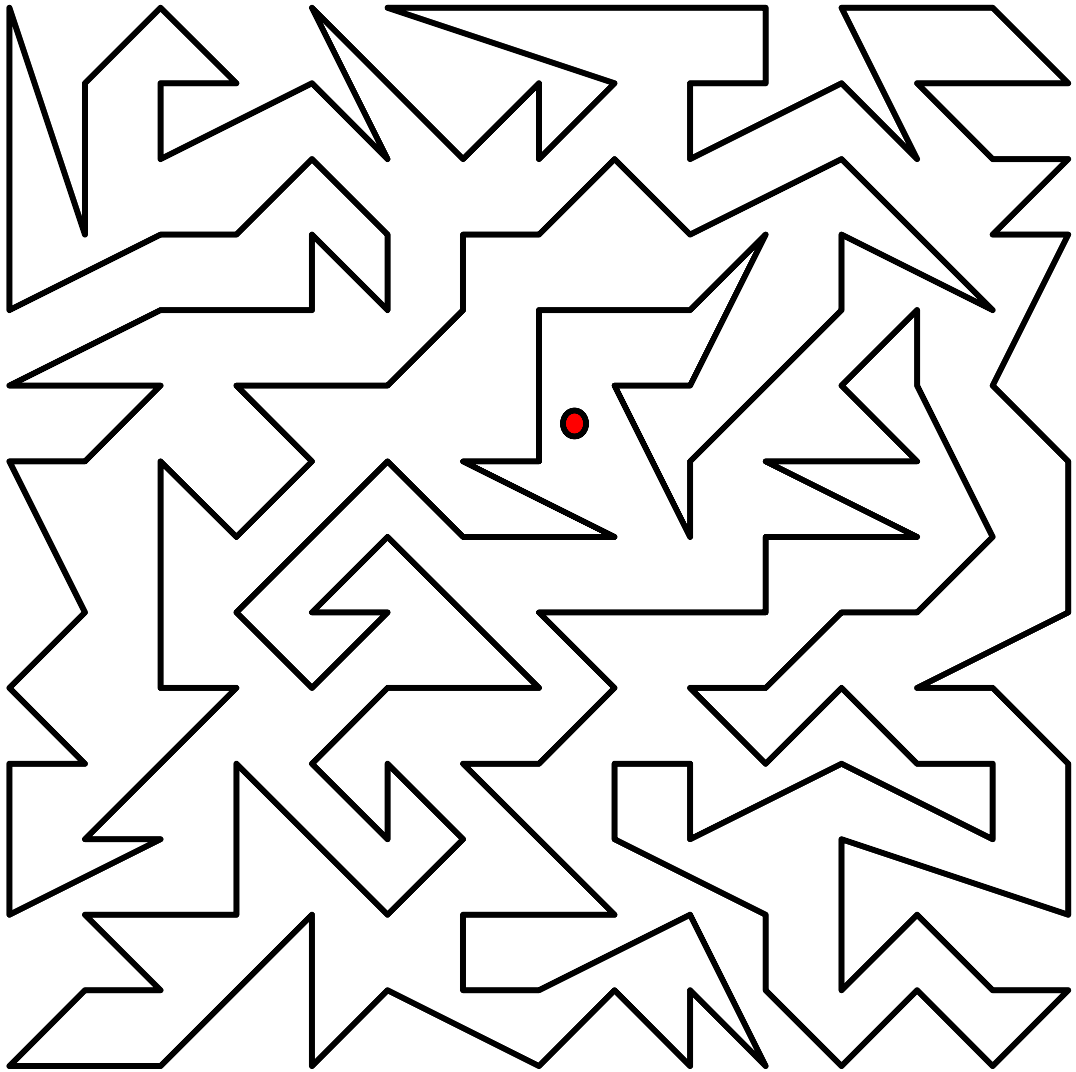


Dva druhy bodov mnohouholníka

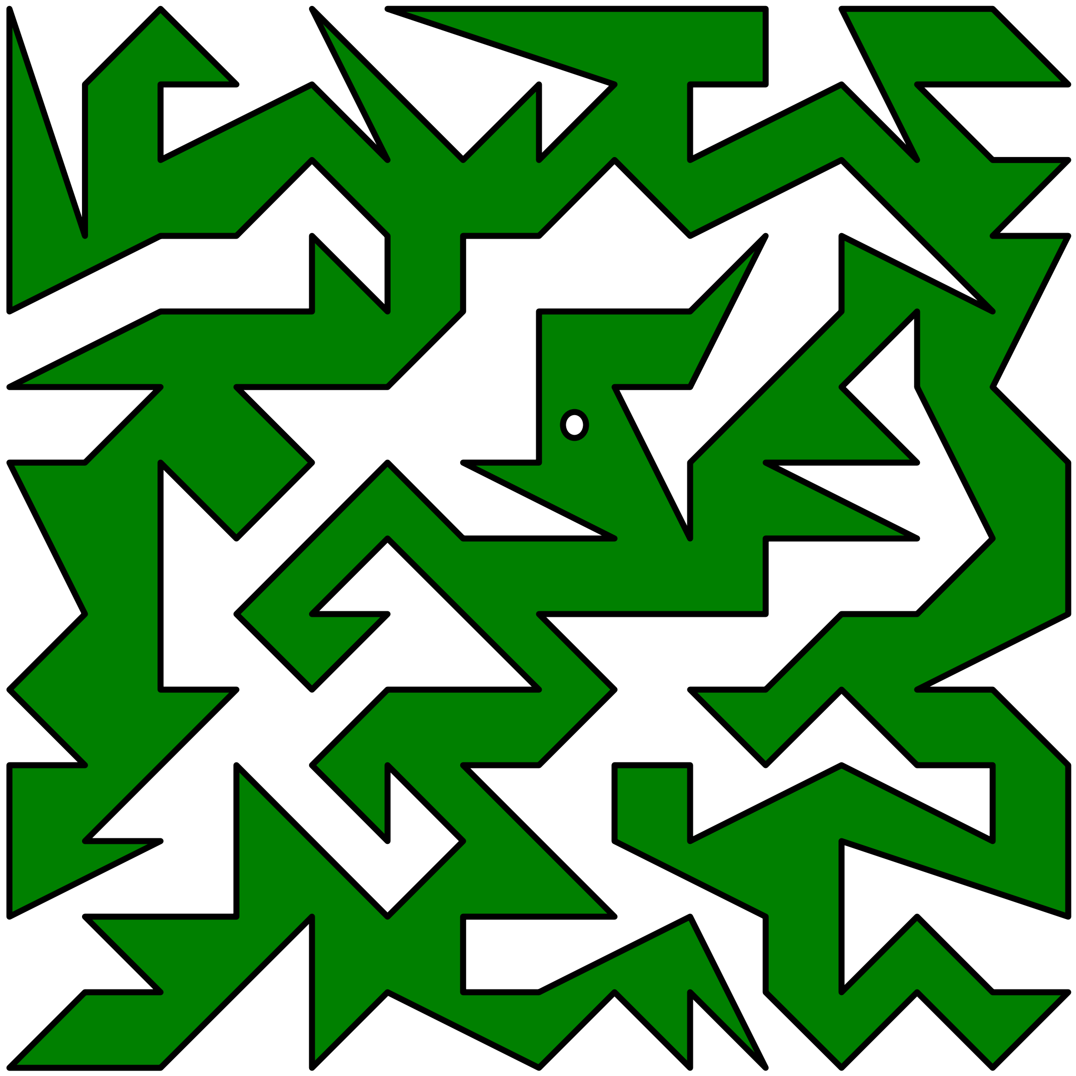
hraničné body	ležia na lomenej čiare, ktorá mnohouholník určila	tvoria *hranicu* mnohouholníka
vnútorné body	ostatné body mnohouholníka	tvoria *vnútro* mnohouholníka

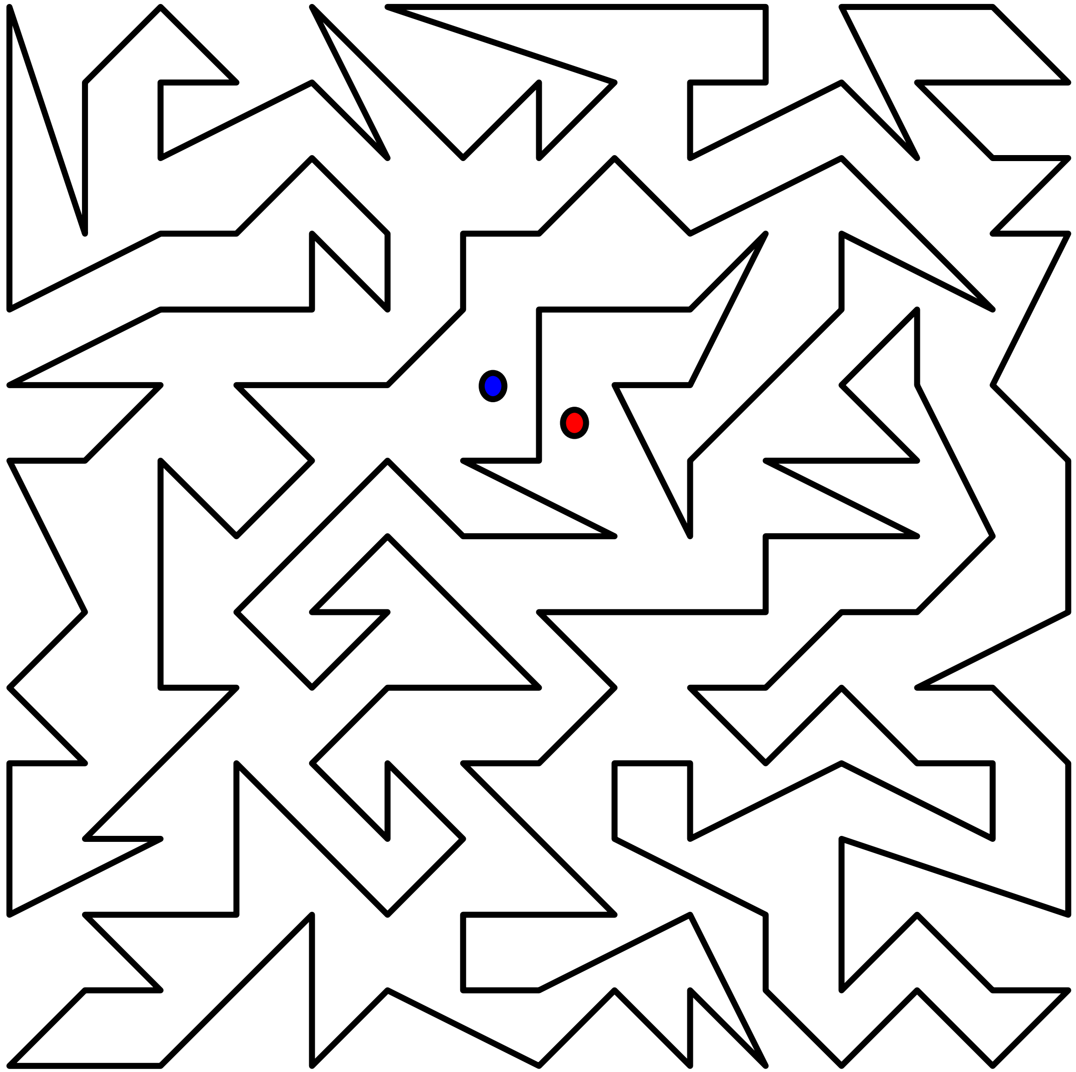


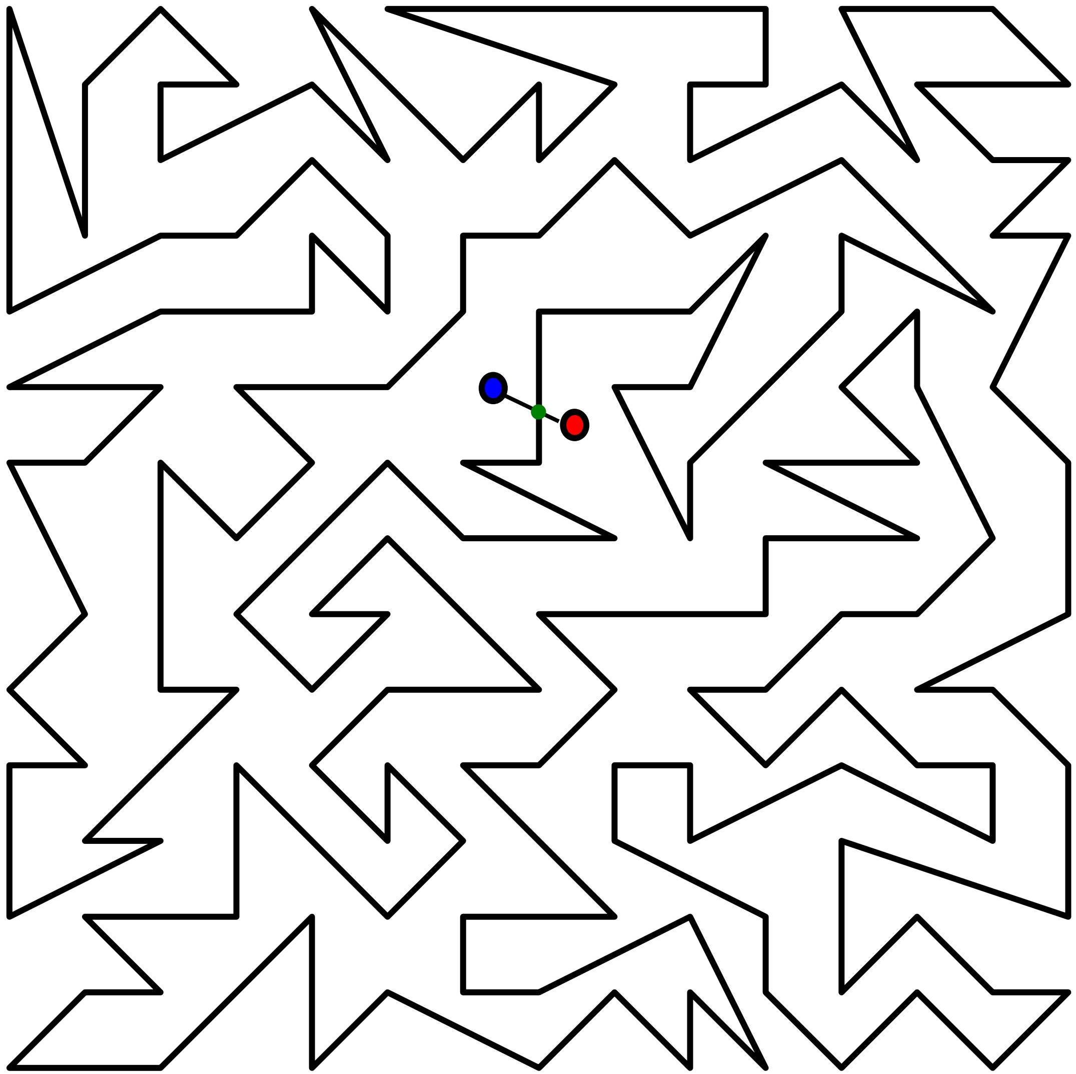
3. Leží daný bod v mnohouholníku?

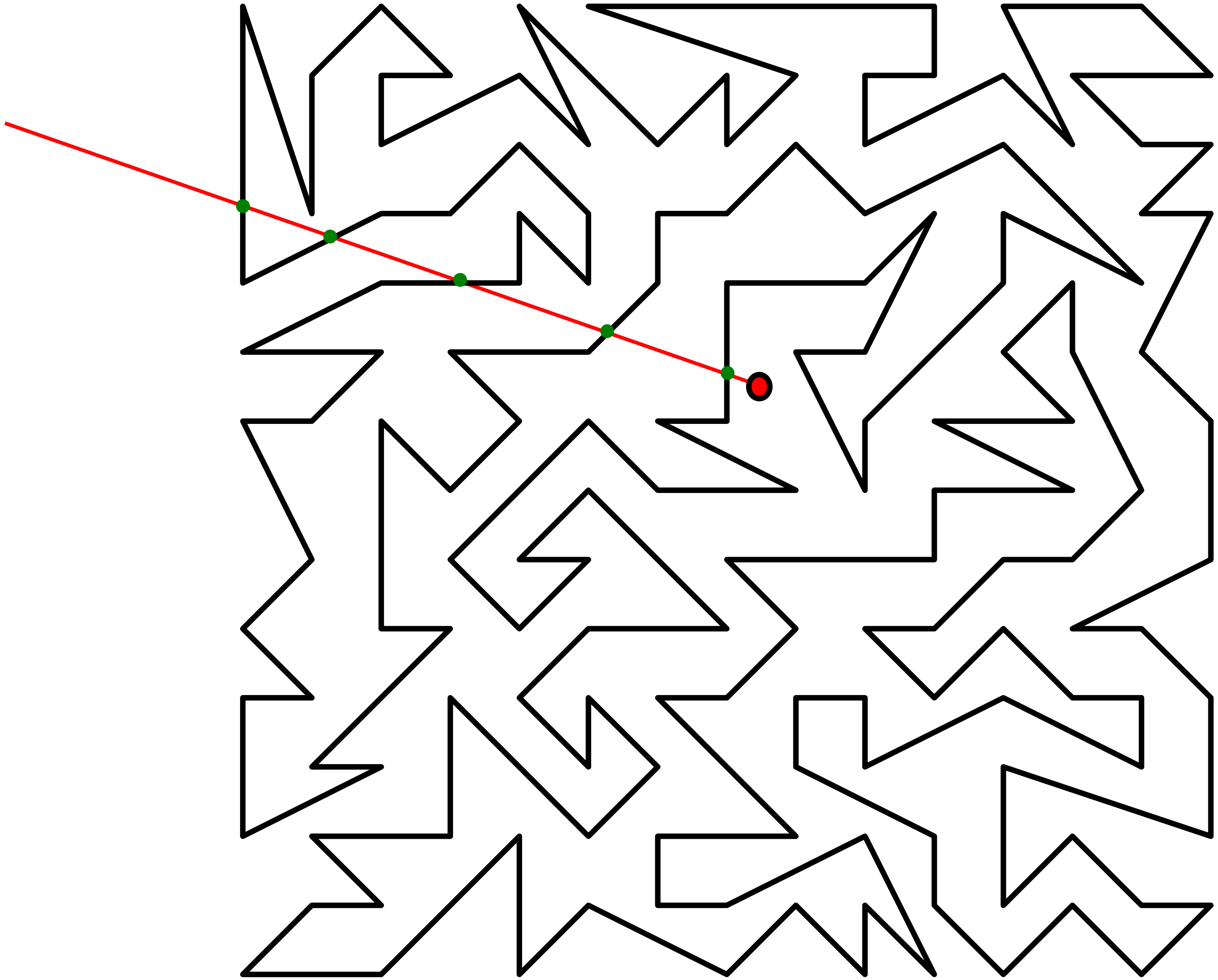


151-uholník z knihy
R. Courant, H. Robbins: What is Mathematics?

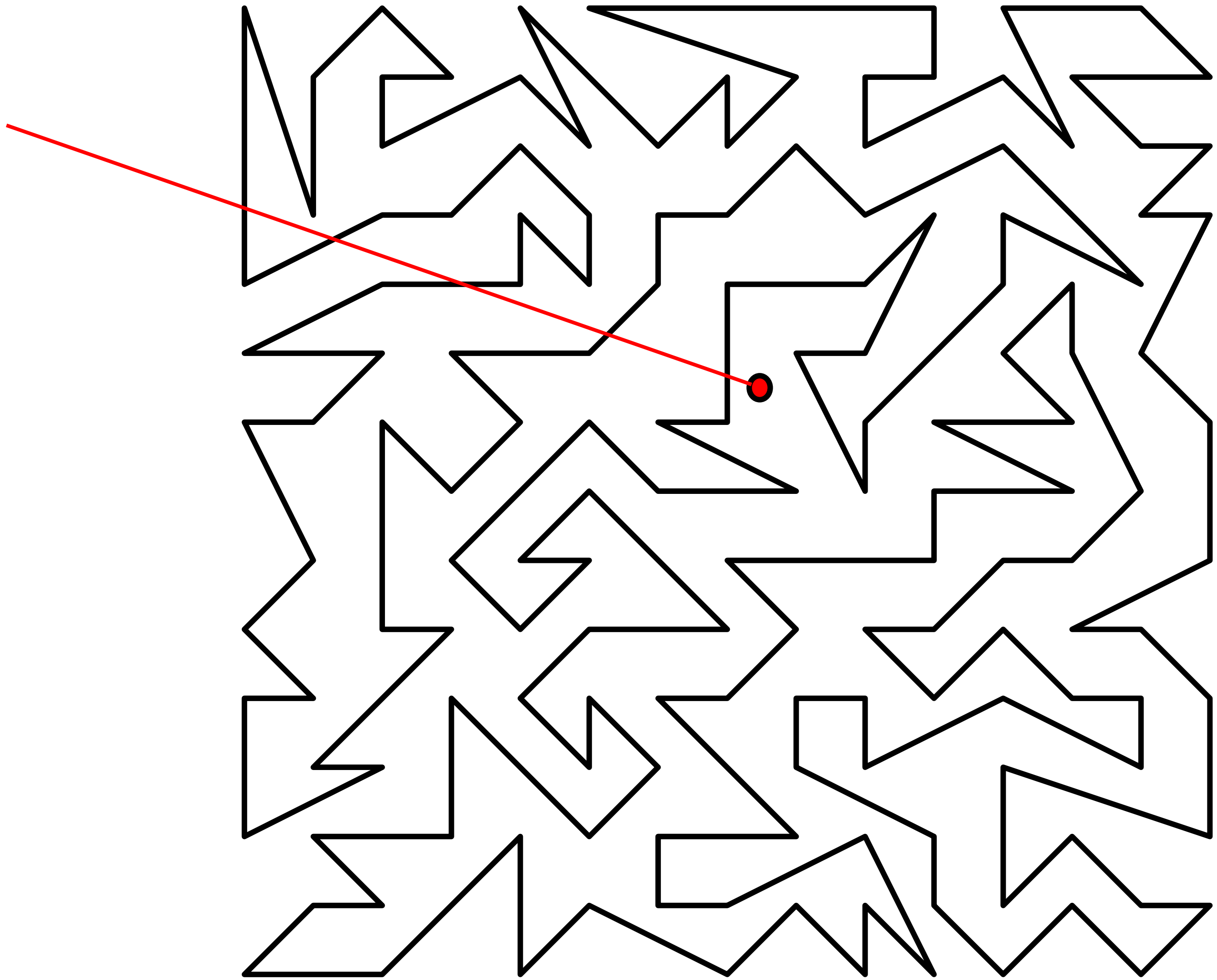






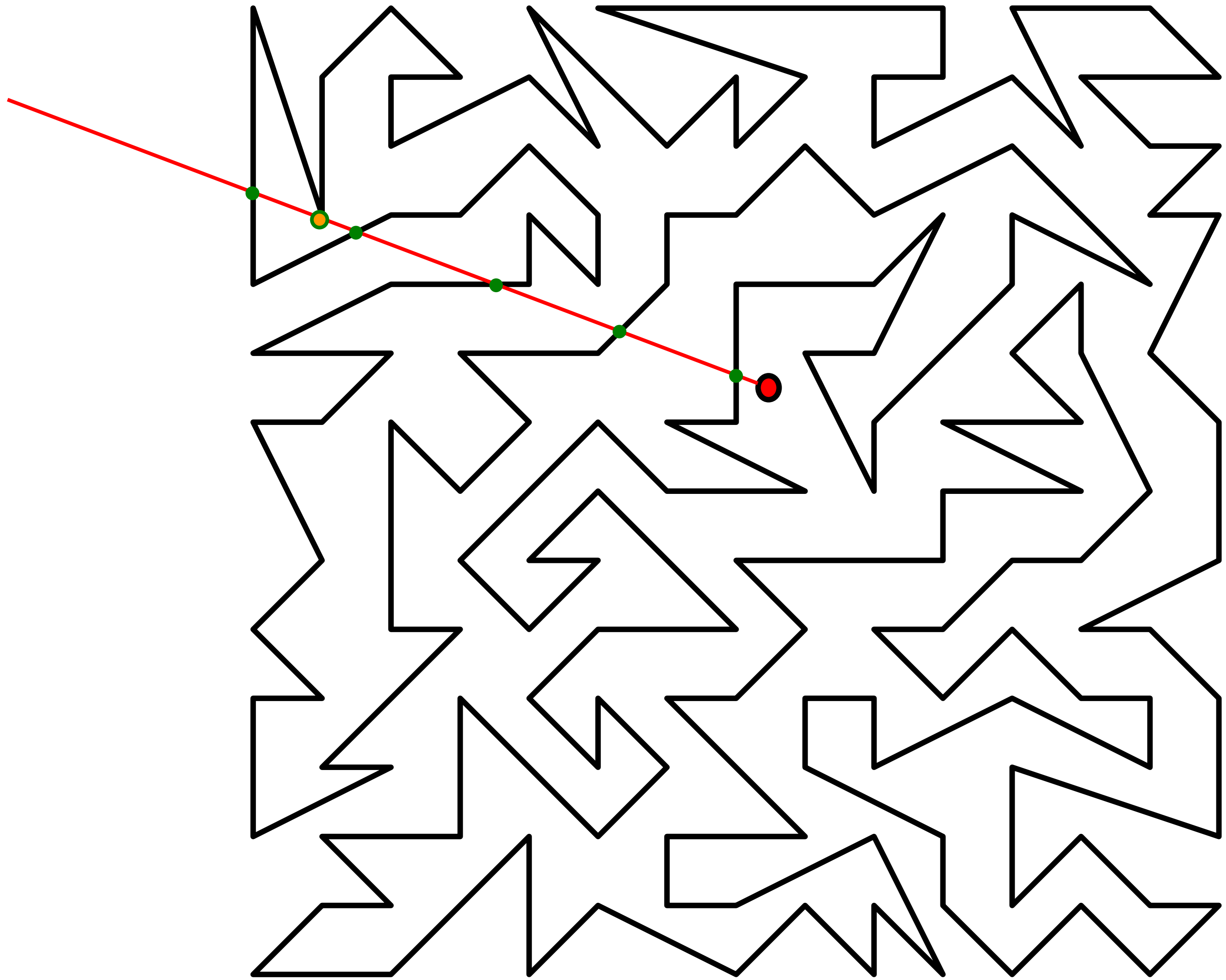


<u>nepárny</u> počet priesečníkov $\Rightarrow$ <u>vnútorný</u> bod
<u>párny</u> počet priesečníkov $\Rightarrow$ <u>vonkajší</u> bod



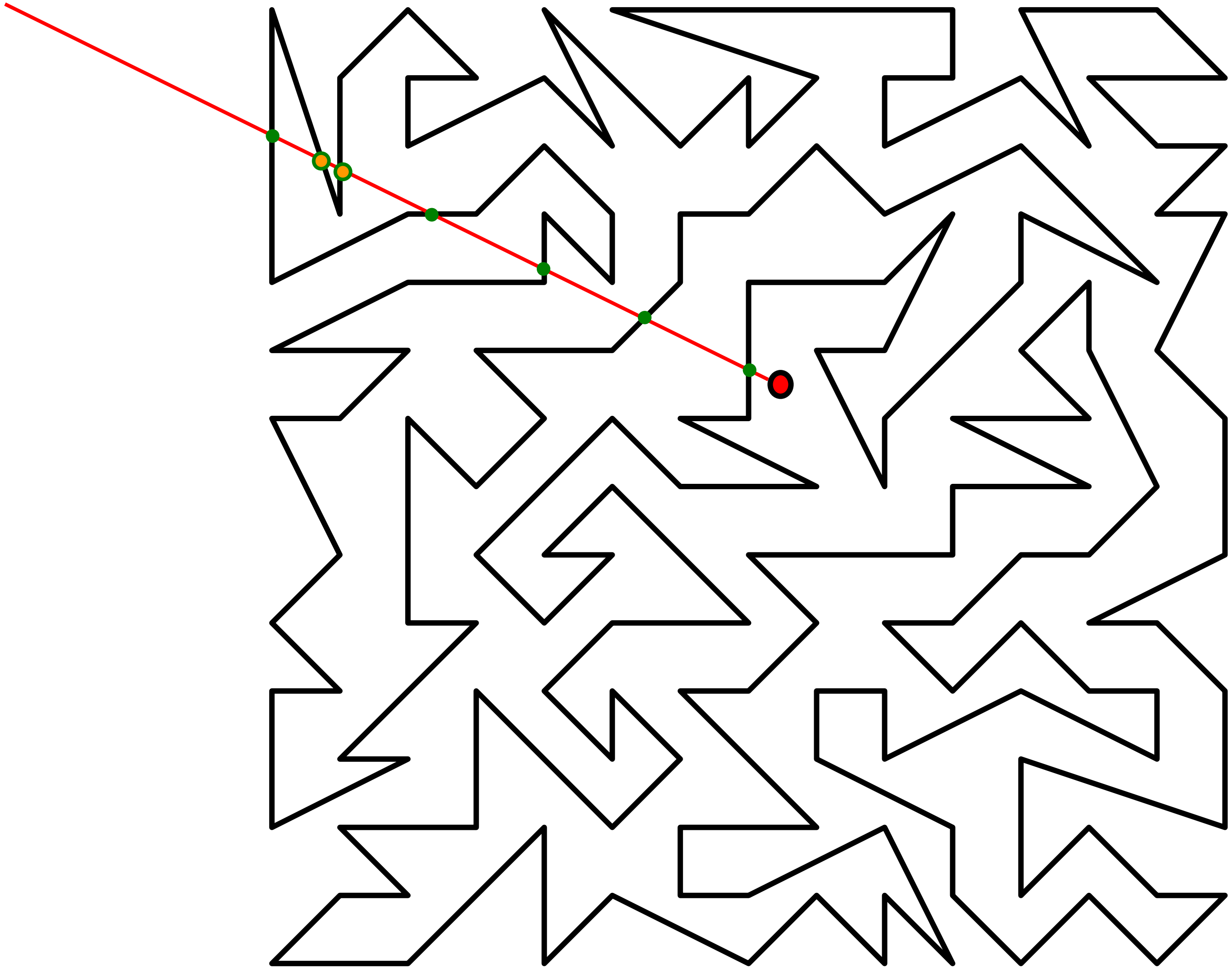
Predpoklad o polpriamke

Neprechádza žiadnym vrcholom mnohouholníka



Paradox!

vnútorný bod a párny počet priesečníkov (6)



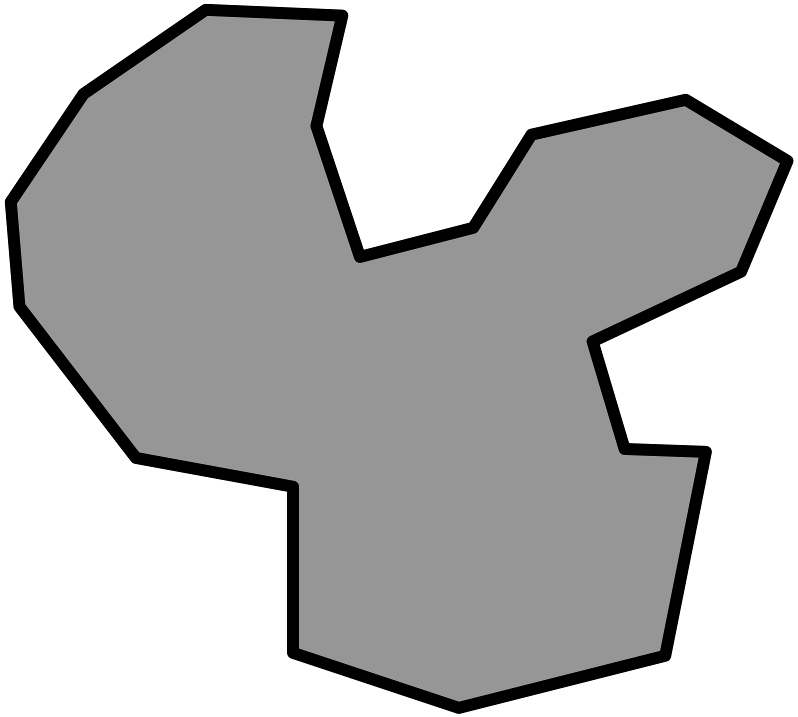
Vysvetlenie paradoxu

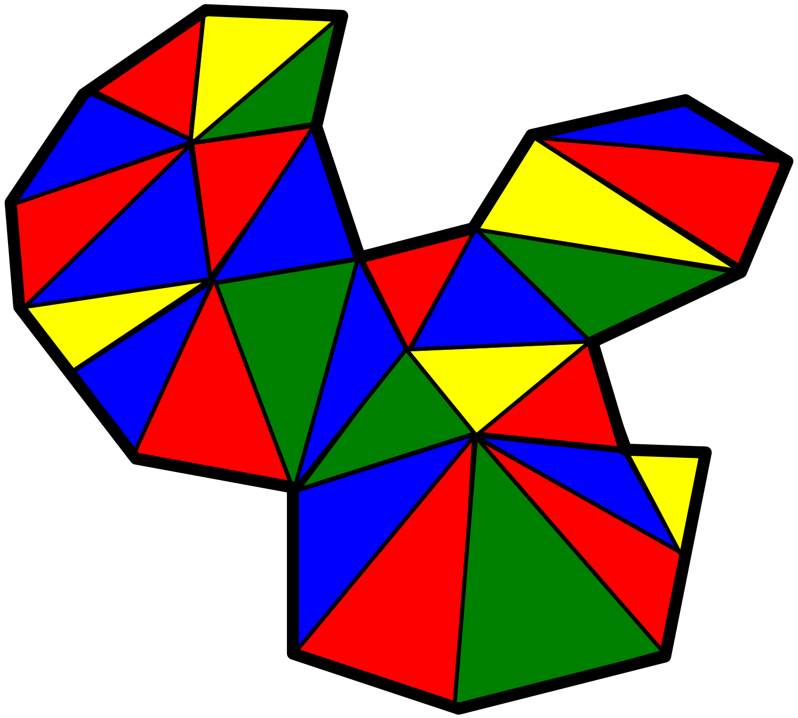
Jeden priesečník (žltý) bol dvojnásobný

4. Triangulácia mnohouholníka

Triangulácia mnohouholníka je jeho vyjadrenie v tvare zjednotenia konečného počtu trojuholníkov.

$$M = \Delta_1 \cup \ldots \cup \Delta_k$$



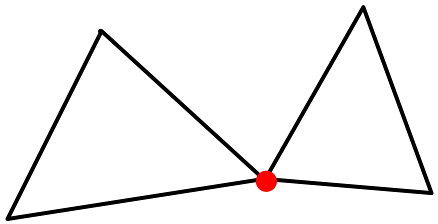


Triangulácia mnohouholníka je jeho vyjadrenie v tvare zjednotenia konečného počtu trojuholníkov,

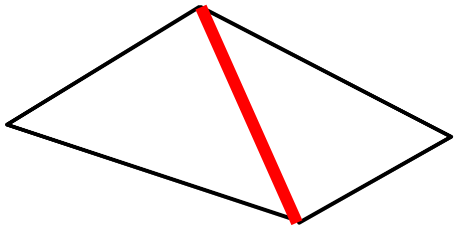
$$M = \Delta_1 \cup \ldots \cup \Delta_k$$

pričom pre každé dva rôzne trojuholníky Δ_i a Δ_j platí

1. $\Delta_i \cap \Delta_j \neq \emptyset$ $\Rightarrow$ $\Delta_i \cap \Delta_j$ je <u>bod alebo úsečka</u>
2. $\Delta_i \cap \Delta_j$ je bod $\Rightarrow$ <u>vrchol</u> oboch trojuholníkov Δ_i, Δ_j
3. $\Delta_i \cap \Delta_j$ je úsečka $\Rightarrow$ <u>strana</u> oboch trojuholníkov Δ_i, Δ_j



alebo

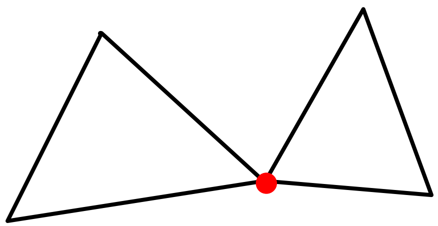


Triangulácia mnohouholníka je jeho vyjadrenie v tvare zjednotenia konečného počtu trojuholníkov,

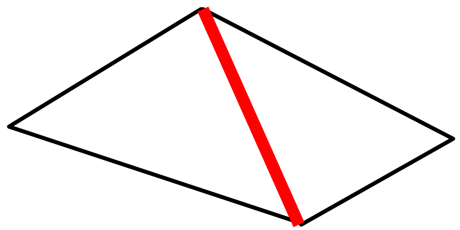
$$M = \Delta_1 \cup \ldots \cup \Delta_k$$

pričom pre každé dva rôzne trojuholníky Δ_i a Δ_j platí

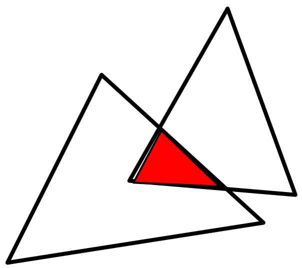
4. $\Delta_i \cap \Delta_j \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad \Delta_i \cap \Delta_j$ je bod alebo úsečka
5. $\Delta_i \cap \Delta_j$ je bod $\quad \Rightarrow \quad$ vrchol oboch trojuholníkov $\Delta_i, \; \Delta_j$
6. $\Delta_i \cap \Delta_j$ je úsečka $\quad \Rightarrow \quad$ strana oboch trojuholníkov $\Delta_i, \; \Delta_j$



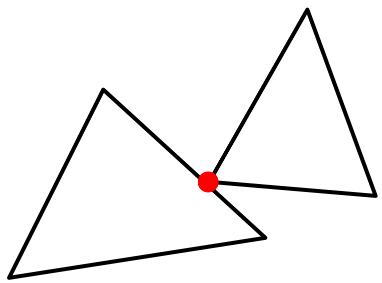
alebo



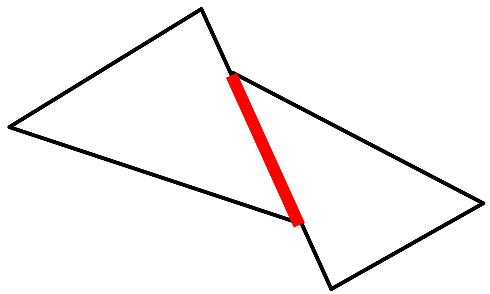
Nie



ani

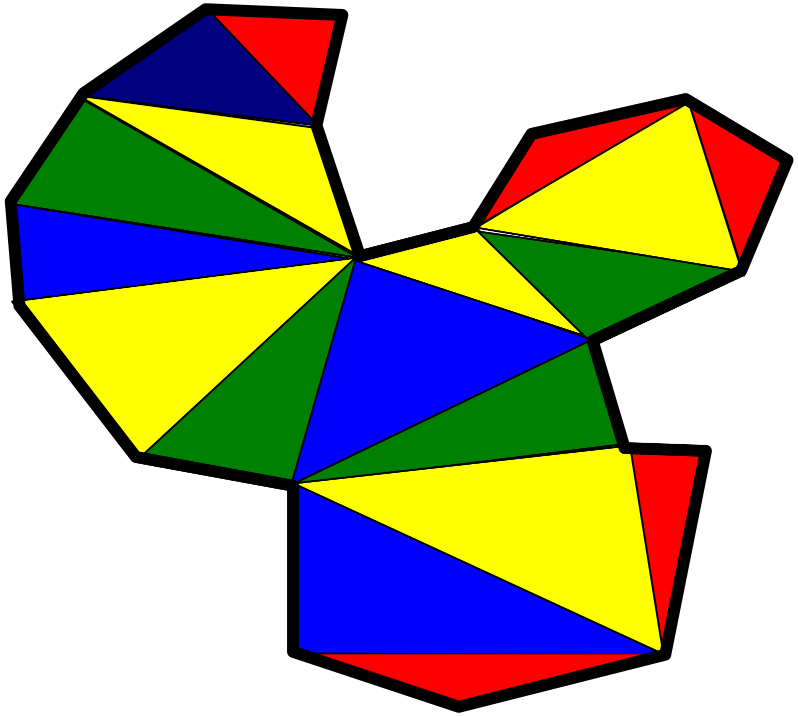


ani

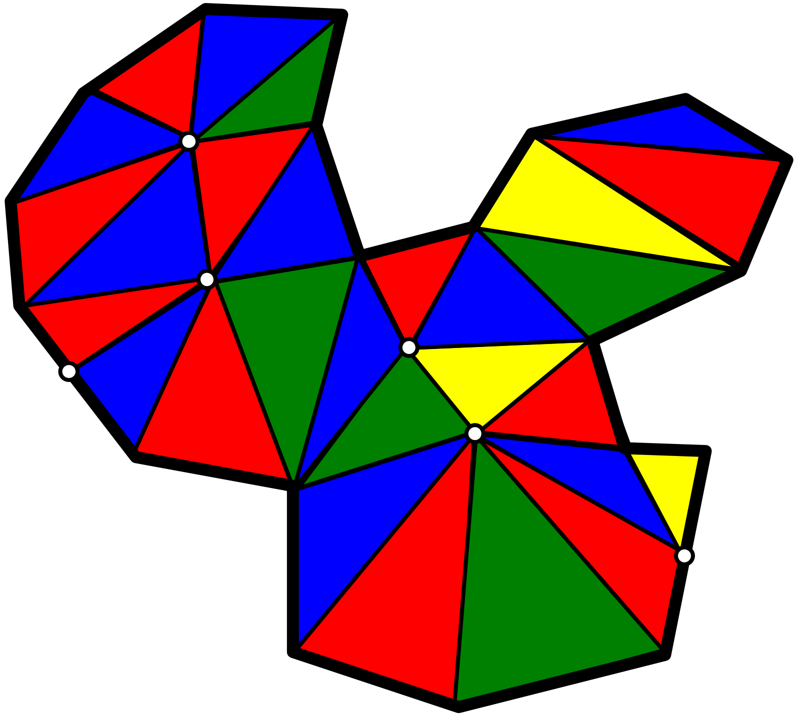


Jednoduchá triangulácia mnohouholníka

všetky vrcholy všetkých trojuholníkov triangulácie sú vrcholmi mnohouholníka



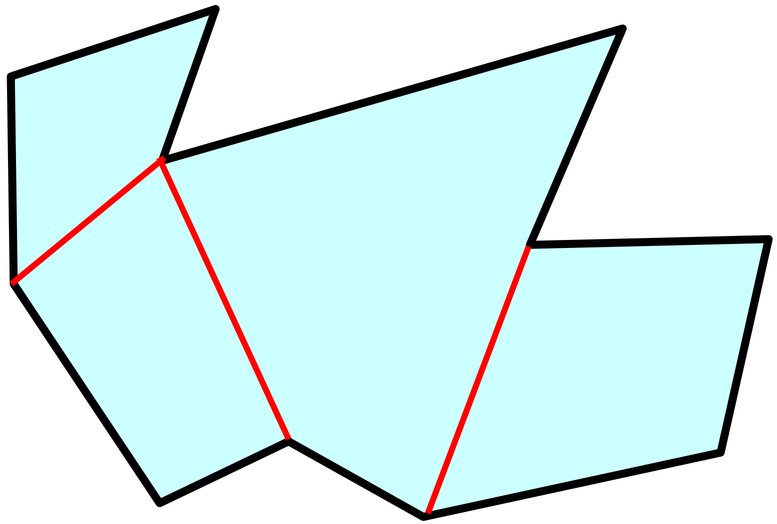
Jednoduchá triangulácia



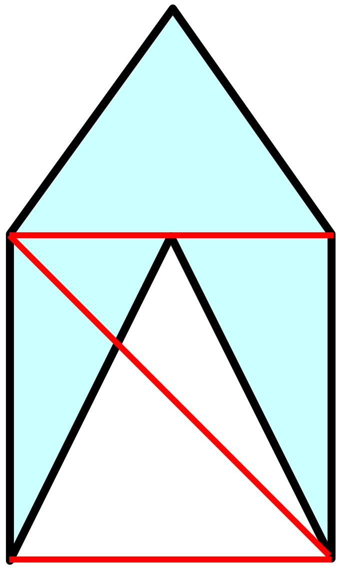
Nie jednoduchá triangulácia

Vnútorná uhlopriečka mnohouholníka

všetky jej body okrem krajných ležia vo vnútri mnohouholníka.



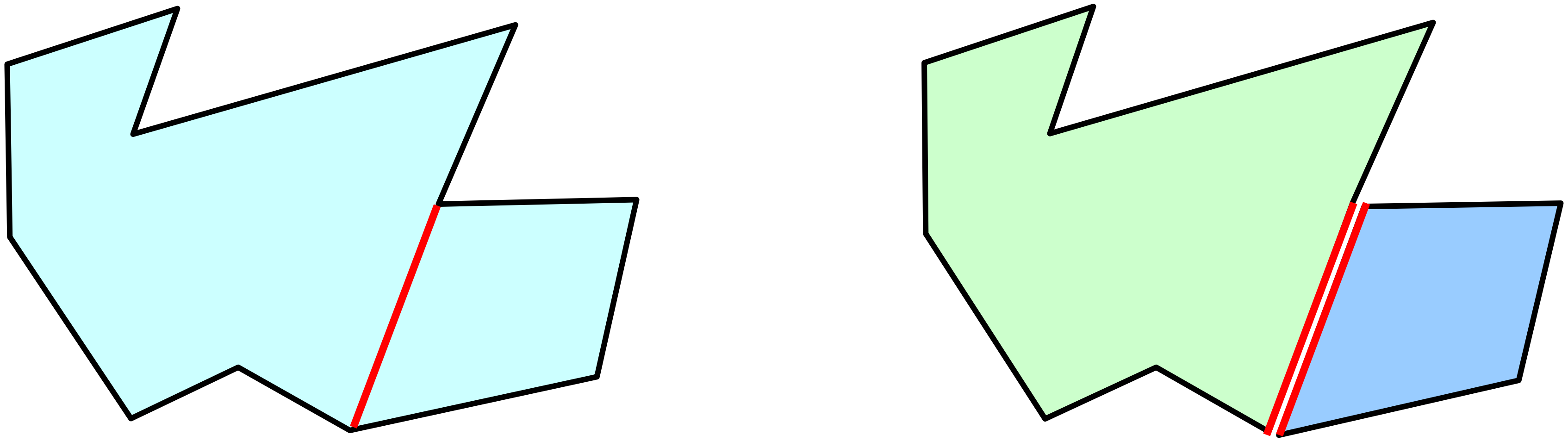
Tri vnútorné uhlopriečky



Tri nie vnútorné uhlopriečky

Veta
Každý mnohouholník s aspoň štyrmi vrcholmi má vnútornú uhlopriečku.

Vnútorná uhlopriečka umožňuje rozdeliť mnohouholník na dva mnohouholníky s menším počtom vrcholov:



Veta

1. Každý mnohouholník má jednoduchú trianguláciu.
2. Každá jednoduchá triangulácia n-uholníka má práve $n-2$ trojuholníkov.

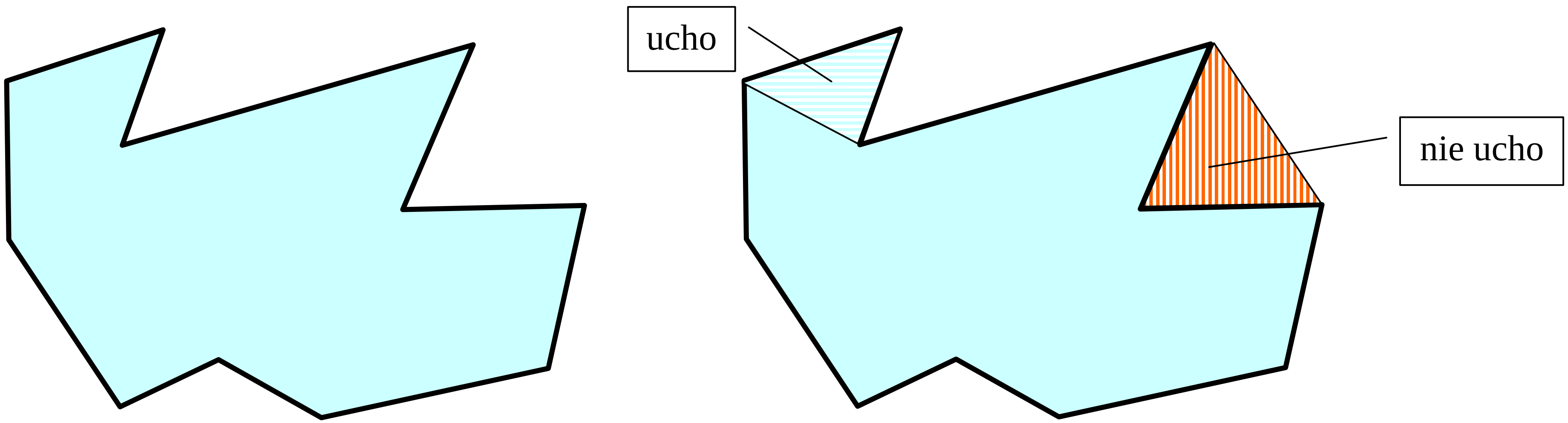
Ukážka využitia jednoduchej triangulácie:

Veta

Súčet veľkostí vnútorných uhlov každého n-uholníka je $(n-2)\pi$.

Ucho mnohouholníka

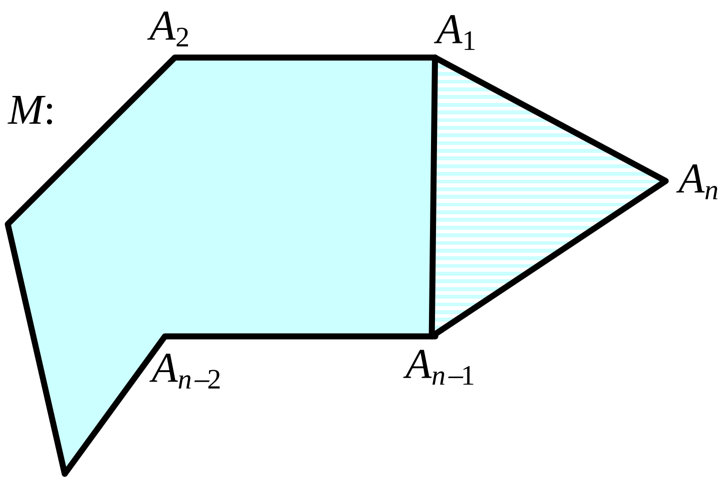
trojuholník, ktorého dve strany sú stranami mnohouholníka a tretia strana je vnútorná uhlopriečka.

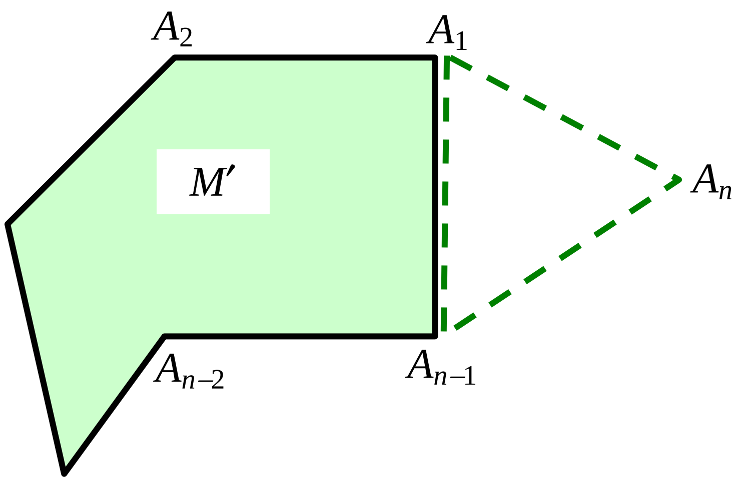


Ucho mnohouholníka leží v tom mnohouholníku a neobsahuje žiadne ďalšie jeho vrcholy.

Keď odstránime ucho n-uholníka, ktorý má aspoň štyri vrcholy, vznikne $(n-1)$-uholník.

Preto vety o mnohouholníkoch môžeme pomocou uší dokazovať indukciou jednoduchšie.

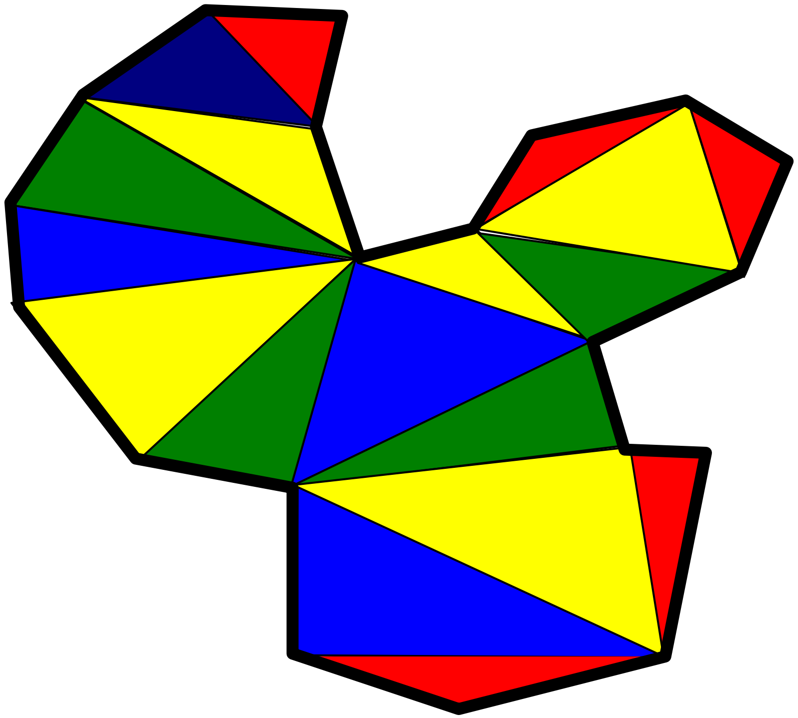




Veta

Nech $n \geq 4$. Potom

1. Každá jednoduchá triangulácia n-uholníka obsahuje ucho.

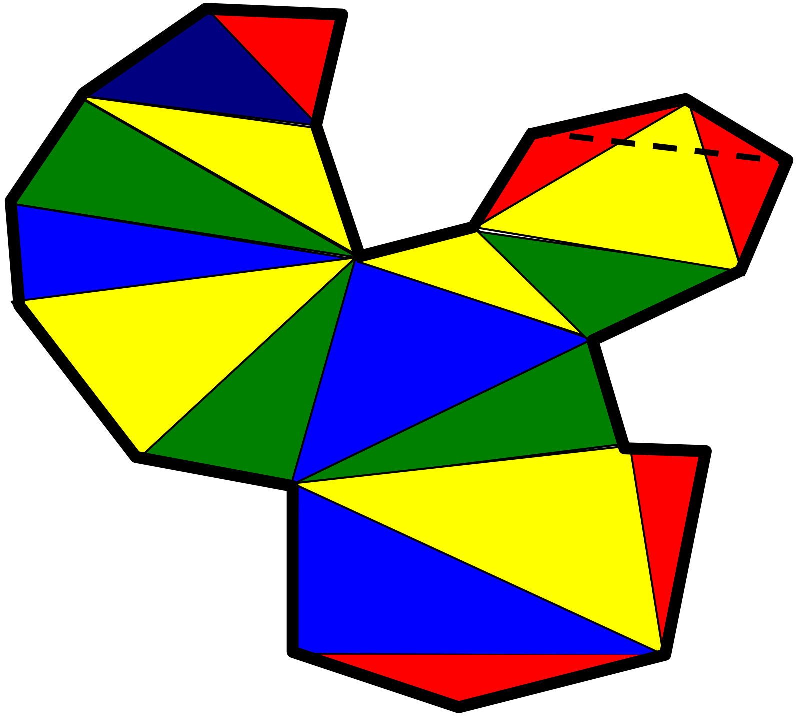


Všetkých päť uší v jednoduchej triangulácii.

Veta

Nech $n \geq 4$. Potom

1. Každá jednoduchá triangulácia n-uholníka obsahuje ucho.
2. Každý n-uholník má ucho.



Všetkých päť uší v jednoduchej triangulácii.
Okrem nich má mnohouholník aj ďalšie uši.

5. Obsah mnohouholníka

Obsah trojuholníka v analytickej geometrii

Obsah trojuholníka $A_1A_2A_3$, $A_1 = (x_1, y_1)$, $A_2 = (x_2, y_2)$, $A_3 = (x_3, y_3)$

Základňa: $z = |A_1A_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Výška trojuholníka $A_1A_2A_3$ na stranu A_1A_2 :

Rovnica priamky A_1A_2 : $-(y_2 - y_1)x + (x_2 - x_1)y + (y_2 - y_1)x_1 - (x_2 - x_1)y_1 = 0$

výška $v = \dfrac{|-(y_2 - y_1)x_3 + (x_2 - x_1)y_3(y_2 - y_1)x_1 - (x_2 - x_1)y_3|}{\sqrt{(-(y_2 - y_1))^2 + (x_2 - x_1)^2}}$

Obsah trojuholníka $A_1A_2A_3$

$$S(\Delta A_1A_2A_3) = ½zv = \ldots = ½\,|-(y_2 - y_1)x_3 + (x_2 - x_1)y_3 + (y_2 - y_1)x_1 - (x_2 - x_1)y_1|$$

Veta
Obsah trojuholníka $A_1A_2A_3$ s vrcholmi $A_1 = (x_1, y_1)$, $A_2 = (x_2, y_2)$, $A_3 = (x_3, y_3)$ je

$$S(\Delta A_1A_2A_3) = ½\,|(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_2y_3) + (x_3y_1 - x_1y_3)|$$

strana A_1A_2 strana A_2A_3 strana A_3A_1

Obsah mnohouholníka a orientovaný obsah mnohouholníka

Definícia

Obsah mnohouholníka $A_1A_2...A_n$ s vrcholmi $A_1 = (x_1, y_1)$, $A_2 = (x_2, y_2)$, ..., $A_n = (x_n, y_n)$ je číslo

$$S(A_1A_2...A_n) = ½\,|(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_2y_3) + ... + (x_ny_1 - x_1y_n)|$$

Definícia

Orientovaný obsah orientovaného mnohouholníka $A_1A_2...A_n$ s vrcholmi $A_1 = (x_1, y_1)$, $A_2 = (x_2, y_2)$, ..., $A_n = (x_n, y_n)$ je číslo

$$S_{\text{or}}(A_1A_2...A_n) = ½\,[\,(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_2y_3) + ... + (x_ny_1 - x_1y_n)\,]$$

Vlastnosti orientovaného obsahu mnohouholníka

1. Zrejme $S(A_1A_2...A_n) = |S_{\text{or}}(A_1A_2...A_n)|$.
2. Pri cyklickej zámene vrcholov mnohouholníka sa orientovaný obsah nemení:
$$S_{\text{or}}(A_1A_2A_3...A_n) = S_{\text{or}}(A_2A_3...A_nA_1) = S_{\text{or}}(A_3...A_nA_1A_2) = ...$$
3. Pri prechode k opačnému poradiu vrcholov sa zmení znamienko orientovaného obsahu:
$$S_{\text{or}}(A_1A_nA_{n-1}...A_2) = -S_{\text{or}}(A_1A_2...A_n),\ ... .$$
4. Teda <u>znamienko orientovaného obsahu vyjadruje orientáciu mnohouholníka</u>.

Obsah mnohouholníka a triangulácia mnohouholníka

Veta

1. Orientovaný obsah mnohouholníka sa rovná súčtu orientovaných obsahov trojuholníkov každej jednoduchej triangulácie mnohouholníka.
2. Orientované obsahy všetkých trojuholníkov jednoduchej triangulácie mnohouholníka majú rovnaké znamienka.
3. Obsah mnohouholníka sa rovná súčtu obsahov všetkých trojuholníkov každej jednoduchej triangulácie mnohouholníka.

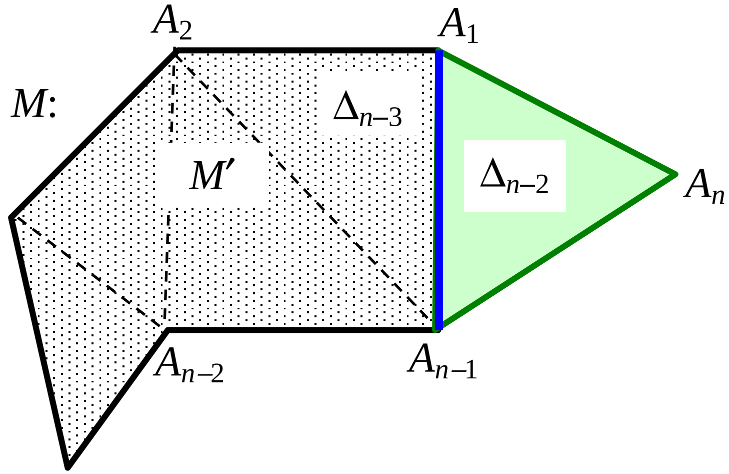
Dôkaz. Nech $M = \Delta_1 \cup ... \cup \Delta_{n-2}$ jednoduchá triangulácia n-uholníka $M = A_1A_2...A_n$.

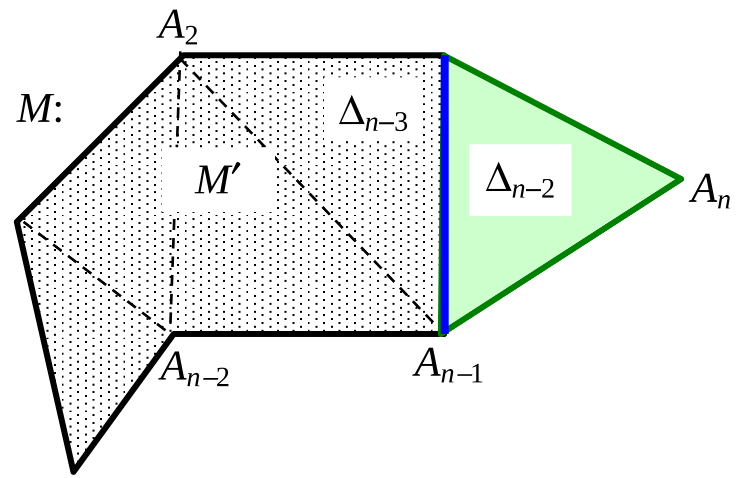
1. a 2. indukciou podľa počtu vrcholov mnohouholníka M . Začiatok indukcie $n = 3$ je triviálny.

Indukčný krok z $n-1$ na n, $n \geq 4$
Veta o existencii ucha v jednoduchej triangulácii $\Rightarrow$ uvažovaná jednoduchá triangulácia obsahuje ucho.

Po prípadnom prečíslovaní vrcholov $A_1A_2...A_n$
(prvý vrchol mnohouholníka bude posledný vrchol ucha)
a trojuholníkov $\Delta_1, ..., \Delta_{n-2}$
ucho je trojuholník $A_{n-1}A_nA_1 = \Delta_{n-2}$.

Vtedy $M' = A_1A_2...A_{n-1}$ je $(n-1)$-uholník a
$M' = \Delta_1 \cup ... \cup \Delta_{n-3}$ je jeho jednoduchá triangulácia.





Podľa indukčného predpokladu $S_{or}(M') = S_{or}(\Delta_1) + \ldots + S_{or}(\Delta_{n-3})$.

$$S_{or}(A_1A_2\ldots A_n) = \tfrac{1}{2}\,[\,(x_1y_2 - x_2y_1) + \ldots + (x_{n-2}y_{n-1} - x_{n-1}y_{n-2}) + (x_{n-1}y_n - x_ny_{n-1}) + (x_ny_1 - x_1y_n)\,] =$$

$$= \tfrac{1}{2}\,[\,(x_1y_2 - x_2y_1) + \ldots + (x_{n-2}y_{n-1} - x_{n-1}y_{n-2}) + (x_{n-1}y_1 - x_1y_{n-1})\,] +$$

$$+ \tfrac{1}{2}\,[\,(x_{n-1}y_n - x_ny_{n-1}) + (x_ny_1 - x_1y_n) + (x_1y_{n-1} - x_{n-1}y_1)] = S_{or}(M') + S_{or}(\Delta_{n-2}) =$$

$$= S_{or}(\Delta_1) + \ldots + S_{or}(\Delta_{n-3}) + S_{or}(\Delta_{n-2})$$

3. vyplýva z 1 a 2:

$$S(M) = |S_{or}(M)| = |S_{or}(\Delta_1) + \ldots + S_{or}(\Delta_{n-2})| = |S_{or}(\Delta_1)| + \ldots + |S_{or}(\Delta_{n-2})| = S(\Delta_1) + \ldots + S(\Delta_{n-2})$$ QED

Veta platí pre každú trianguláciu mnohouholníka.

Geometrický význam sčítancov v (orientovanom) obsahu mnohouholníka

Zvolíme:
P: ľubovoľný bod v rovine
Sústava súradníc: $P = (0, 0)$

$$S_{\mathrm{or}}(A_1A_2...A_n) = ½(x_1y_2 - x_2y_1) + ½(x_2y_3 - x_2y_3) + ... + ½(x_ny_1 - x_1y_n)$$

Orientovaný obsah trojuholníka $A_1A_2A_3$:

$$S_{\mathrm{or}}(\Delta A_1A_2A_3) = ½(x_1y_2 - x_2y_1) + ½(x_2y_3 - x_2y_3) + ½(x_3y_1 - x_1y_3)$$

Orientovaný obsah trojuholníka A_1A_2P:

$$x_3 = y_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad S_{\mathrm{or}}(\Delta A_1A_2P) = ½(x_1y_2 - x_2y_1)$$

Zvolíme:
P: ľubovoľný bod v rovine
Sústava súradníc: $P = (0, 0)$

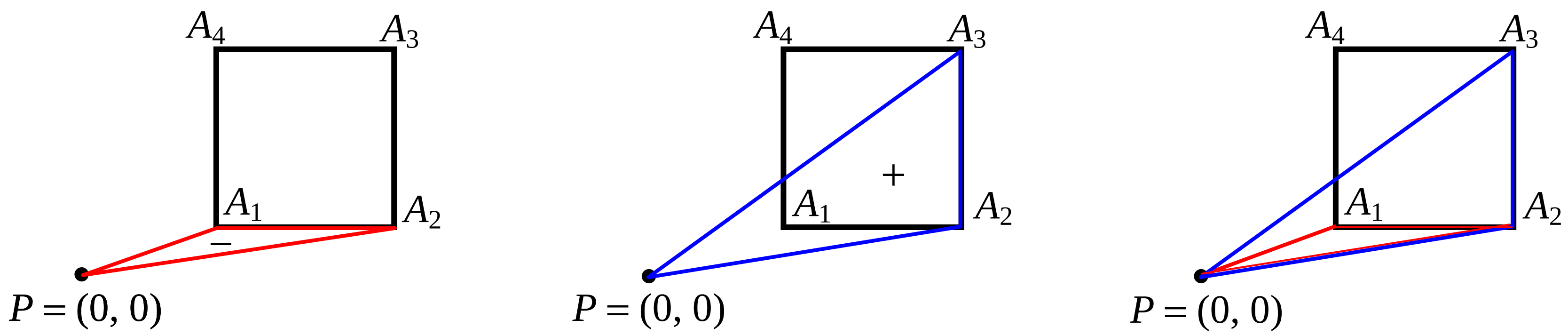
$$S_{\text{or}}(A_1A_2\ldots A_n) = \tfrac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1) + \tfrac{1}{2}(x_2y_3 - x_2y_3) + \ldots + \tfrac{1}{2}(x_ny_1 - x_1y_n)\,]$$

Orientovaný obsah trojuholníka $A_1A_2A_3$:

$$S_{\text{or}}(\Delta A_1A_2A_3) = \tfrac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1) + \tfrac{1}{2}(x_2y_3 - x_2y_3) + \tfrac{1}{2}(x_3y_1 - x_1y_3)]$$

Orientovaný obsah trojuholníka A_1A_2P:

$$x_3 = y_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad S_{\text{or}}(\Delta A_1A_2P) = \tfrac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1)$$



Ďakujem za pozornosť

Miloš Božek
bozek@fmph.uniba.sk